CPGE BCPST 1
Année Académique: 2023 - 2024

TP N°4 d'informatique

Méthodes numériques: Calcul d'intégrales

Anicet E.T. Ebou, ediman.ebou@inphb.ci

I Méthode des rectangles

Le principe de la méthode des rectangles est de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en $n+1$ points régulièrement espacés $(a_0, \ldots, a_n)$, avec $a_0 = a$ et $a_n = b$, ainsi le calcul de l'intégrale de $\int_a^b f$ sera approché par la somme des aires des rectangles. L'aire d'un rectangle est $(a_i - a_{i+1})f(a_i) = \frac{b-a}{n} f(a_i)$.

Donc l'approximation de l'intégrale sera :

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_i)s$$

Q.1. Écrire une fonction `rectangle1(f,a,b,n)` qui prend en entrée une fonction `f`, deux nombres réels `a`, `b` et un entier `n` et qui retourne l'approximation de $\int_a^b f$ avec la méthode des rectangles.

Q.2. Essayer cette fonction pour calculer l'aire sous les courbes:

2.1) $y = x$ entre 0 et 1,

2.2) $y = \lfloor x \rfloor$ entre 0 et 10,

2.3) $y = \frac{\sin x}{x}$ entre 0 et 2π.

On pourrait aussi penser à une méthode similaire en évaluant f au milieu, ou au bout de l'intervalle :

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(a_{i+1})$$

ou

$$\int_a^b f \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{f(a_i) + f(a_{i+1})}{2}$$

Q.3. Écrire des fonctions `rectangle1(f,a,b,n)` et `rectangle3(f, a, b, n)` qui adaptent ces méthodes.

Q.4. Comparer ces fonctions à la première sur les fonctions proposées.

II Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes consiste à mesurer l'aire du trapèze délimité par les points $(a_i, 0)$, $(a_i, f(a_i))$, $(a_{i+1}, f(a_{i+1}))$ et $(a_{i+1}, 0)$.

Q.5. Calculer cette aire. A quelle méthode que nous avons déjà effectuée cela correspond-il ?

III Méthode d'interpolation polynomiale

Pour affiner encore la méthode, on peut essayer d'approcher par un polynôme de degré 2 la courbe de f entre a_i et a_{i+1}.

On pose a, $b \in \mathbb{R}$ et $c = \frac{a+b}{2}$ et $P(x) = \alpha(x-a)(x-b) + \beta(x-a)(x-c) + \gamma(x-b)(x-c)$.

Q.6. Calculer α, β, γ tels que $P(a) = f(a)$, $P(b) = f(b)$ et $P(c) = f(c)$. (On dit que P est le polynôme interpolateur de Lagrange de f en a, b, c.)

Q.7. Ecrire une fonction `calcul_poly(f,a,b)` qui prend en entrée la fonction f, deux réels a, b et qui retourne α, β, γ.

Q.8. Écrire une fonction `coeff_poly(f,a,b)` qui prend en entrée la fonction f, deux réels a, b et qui retourne les coefficients réels du polynôme P décrit ci-dessus. (A, B, C tels que $P = Ax^2 + Bx + C$.)

Q.9. Écrire une fonction `aire_poly(f,a,b)` qui prend en entrée la fonction f, deux réels a, b et qui retourne l'aire sous la courbe de P.

Q.10. Écrire une fonction `integrale(f,a,b,n)` qui prend en entrée la fonction f, deux réels a, b et un entier n et qui calcule l'intégrale en faisant la somme des aires calculées en interpolant la fonction entre a_i et a_{i+1}.

IV Module python pour calcul d'intégrales

Il existe bien sûr un module clé en main dans Python : `scipy.integrate`.

On peut alors utiliser `integr.quad(f, a, b)` pour calculer l'intégrale entre a et b de f.

Q.11. Comparer les valeurs d'intégrales obtenues avec le module à celles que nous avons calculées.

V Applications

Q.12. Utiliser ces algorithmes pour tracer la fonction $x \to \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ et la fonction $x \to \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$ pour x entre -10 et 10.

Q.13. Utiliser ces algorithmes pour tracer la fonction $x \to \int_0^{10} t^{x-1} e^{-t} dt$ pour x entre -2 et 2.