Indices et mesures d'inégalité

Anicet E. T. Ebou, ediman.ebou@inphb.ci

01

Indices simples

Définition

Un indice est la valeur d'une grandeur par rapport à une valeur de référence.

Soit Xt une variable fonction du temps, l'indice d'évolution de X entre une date t et une date t' est défini par:

$$I(t/t') = 100 \times \frac{X_t}{X_{t'}}$$

Défintion

On appelle aussi le type d'indice précédent indice simple ou indice élémentaire.

Exercice: soit le tableau du prix d'un bien de consommation de 2000 à 2006. Calculez la matrice de prix du bien, c'est-à-dire les indices entre les différentes années.

année	t	prix p_t
2000	0	2.00
2001	1	2.30
2002	2	2.40
2003	3	2.80
2004	4	3.00
2005	5	3.50
2006	6	4.00

Propriété des indices

Considérons un indice quelconque I(t/0). On dit que cet indice possède les propriétés de:

- *réversibilités* si $I(t/0) = 100^2 \times 1/I(0/t)$;
- *Identité* si $I(t/t) = 100$;
- *Circularité* (ou *transitivité*) si $I(t/u) \times I(u/v) = 100 \times I(t/v)$

Ces trois propriétés sont toujours satisfaites pour un indice simple.

02

Indices synthétiques

Indices synthétiques

Quand on veut calculer un indice à partir de plusieurs prix, le problème devient sensiblement plus compliqué. Un indice synthétique est une grandeur d'un ensemble de biens par rapport à une année de référence. On ne peut pas construire un indice synthétique en additionnant simplement des indices simples.

Il faut, en effet, tenir compte des quantités achetées.

Indices synthétiques

Pour calculer un indice de prix de n biens de consommation étiquetés de 1, 2, …, n, on utilise la notation suivante:

- P_{ti} représente le prix du bien de consommation *i* au temps t,
- Q_{ti} représente la quantité de biens *i* consommée au temps t.

Il existe deux méthodes fondamentales pour calculer les indices synthétiques de prix: l'indice de Paasche et l'indice Laspeyres.

Indice de Laspeyres

L'indice de Laspeyres, est défini par:

$$L(t/0) = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{0i} p_{ti}}{\sum_{i=1}^{n} q_{0i} p_{0i}}.$$

On utilise pour le calculer, les quantités q_{0i} du temps de référence.

L'indice de Laspeyres ne possède ni la propriété de circularité ni de réversibilité.

Indice de Laspeyres

L'indice de Laspeyres, peut aussi être présenté comme une moyenne pondérée des indices simples.

$$L(t/0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{0i} I_i(t/0)}{\sum_{i=1}^{n} w_{0i}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{0i} 100 \times \frac{p_{ti}}{p_{0i}}}{\sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{0i}} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{0i} p_{ti}}{\sum_{i=1}^{n} p_{0i} q_{0i}}.$$

Indice de Laspeyres

Temps	0		1		2	
	Prix (p_{0i})	Quantités (q_{0i})	Prix (p_{1i})	Quantités (q_{1i})	Prix (p_{2i})	Quantités (q_{2i})
Bien 1	100	14	150	10	200	8
Bien 2	60	10	50	12	40	14
Bien 3	160	4	140	5	140	5

Calculez les indices de Laspeyres *L(1/0), L(2/0), L(2/1)*.

Indice de Paasche

L'indice de Paasche, est défini par:

$$P(t/0) = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{ti} p_{ti}}{\sum_{i=1}^{n} q_{ti} p_{0i}}.$$

On utilise, pour le calculer, les quantités q_{ti}, du temps par rapport auquel on veut calculer l'indice.

Indice de Paasche

L'indice de Paasche peut aussi être présenté comme une moyenne harmonique pondérée des indices simples.

$$P(t/0) = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_{ti}}{\sum_{i=1}^{n} w_{ti}/I_i(t/0)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{ti}q_{ti}}{\sum_{i=1}^{n} p_{ti}q_{ti}\frac{p_{0i}}{100\times p_{ti}}} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{n} q_{ti}p_{ti}}{\sum_{i=1}^{n} q_{ti}p_{0i}}.$$

Indice de Paasche

L'indice de Paasche ne possède ni la propriété de circularité ni de réversibilité. Il est aussi plus difficile à calculer que l'indice de Laspeyres, car on doit connaître les quantités pour chaque valeur de *t*.

Indice de Paasche

Temps	0		1		2	
	Prix (p_{0i})	Quantités (q_{0i})	Prix (p_{1i})	Quantités (q_{1i})	Prix (p_{2i})	Quantités (q_{2i})
Bien 1	100	14	150	10	200	8
Bien 2	60	10	50	12	40	14
Bien 3	160	4	140	5	140	5

Calculez les indices de Paasche *P(1/0), P(2/0), P(2/1)*.

Indice de Fisher

L’indice de Laspeyres est en général plus grand que l’indice de Paasche, ce qui peut s’expliquer par le fait que l’indice de Laspeyres est une moyenne arithmétique d’indices élémentaires tandis que l’indice de Paasche est une moyenne harmonique.

Nous avons vu qu’une moyenne harmonique est toujours inférieure ou égale à une moyenne arithmétique.

Indice de Fisher

Fisher a proposé d'utiliser un compromis entre l'indice de Paasche et de Laspeyres en calculant simplement la moyenne géométrique de ces deux indices:

$$F(t/0) = \sqrt{L(t/0) \times P(t/0)}.$$

L'avantage de l'indice de Fisher est qu'il jouit de la propriété de réversibilité.

Indice de Sidgwick

L'indice de Sidgwick est la moyenne arithmétique des indices de Paasche et de Laspeyres.

$$S(t/0) = \frac{L(t/0) + P(t/0)}{2}.$$

Exercice

Temps	0		1		2	
	Prix (p_{0i})	Quantités (q_{0i})	Prix (p_{1i})	Quantités (q_{1i})	Prix (p_{2i})	Quantités (q_{2i})
Bien 1	100	14	150	10	200	8
Bien 2	60	10	50	12	40	14
Bien 3	160	4	140	5	140	5

Calculez les indices de Fisher et de Sigdwick.

03

Indices chaines

Indices chaines

Le défaut principal des indices de Laspeyres, de Paasche, de Fisher et de Sidgwick est qu'ils ne possèdent pas la propriété de circularité.

Un indice qui possède cette propriété est appelé indice chaîne. Pour construire un indice chaîne, avec l'indice de Laspeyres, on peut faire un produit d'indices de Laspeyres annuels.

$$\boxed{CL(t/0) = 100 \times \frac{L(t/t-1)}{100} \times \frac{L(t-1/t-2)}{100} \times \cdots \times \frac{L(2/1)}{100} \times \frac{L(1/0)}{100}.}$$

04

Mesures de l’inégalité

Introduction

Des indicateurs particuliers ont été développés pour mesurer les inégalités des revenus ou les inégalités de patrimoine. On considère qu’une société est parfaitement égalitaire si tous les individus reçoivent le même revenu. La situation théorique la plus inégalitaire est la situation où un individu perçoit la totalité des revenus, et les autres individus n’ont aucun revenu.

Courbe de Lorenz

Plusieurs indices d'inégalité sont liés à la courbe de Lorenz. On note x_1,...., x_i, ..., x_n les revenus des *n* individus de la population étudiée.

On note également $x_{(1)}$,...., $x_{(i)}$, ..., $x_{(n)}$ la statistique d'ordre, c'est-à-dire la série de revenus triés par ordre croissant.

Courbe de Lorenz

Notons maintenant q_i la proportion de revenus par rapport au revenu total qu'ont gagné les i individus ayant les plus bas revenus, ce qui s'écrit

$$q_i = \frac{\sum_{j=1}^{i} x_{(j)}}{\sum_{j=1}^{n} x_{(j)}} \text{ avec } q_0 = 0 \text{ et } q_n = 1.$$

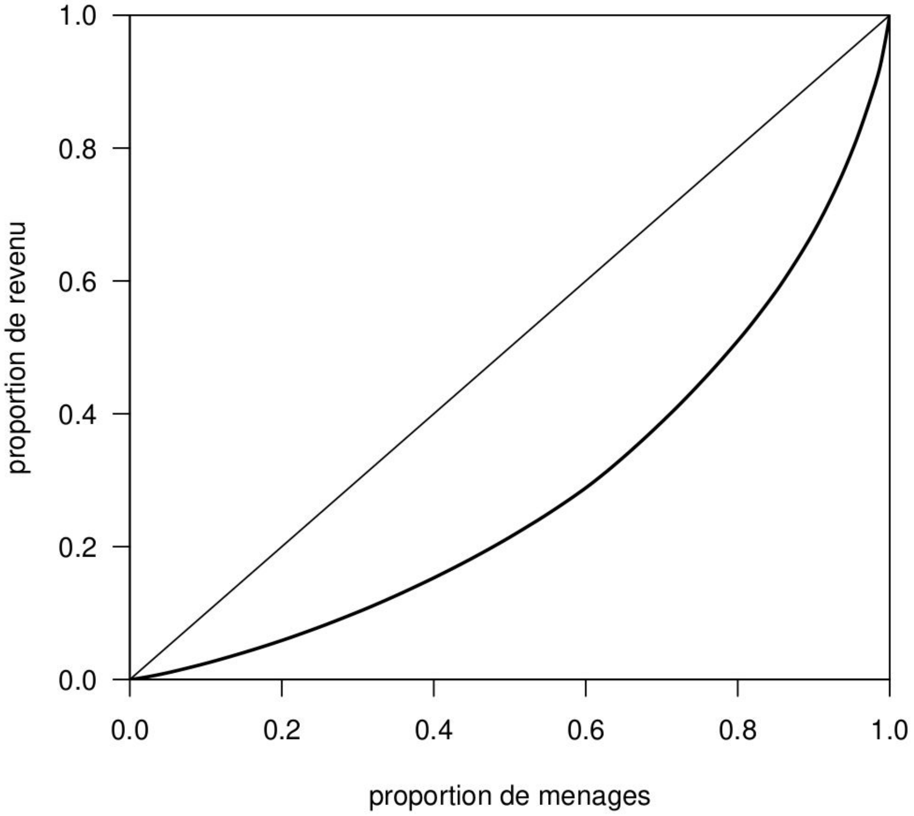
La courbe de Lorenz est la représentation graphique de la fonction qui à la part des individus les moins riches associe la part *y* du revenu total qu'ils perçoivent.

Courbe de Lorenz

Plus précisément, la courbe de Lorenz relie les points (*i/n, q_i*) pour i = 1,...,n. En abscisse, on a donc une proportion d'individus classés par ordre de revenu, et en ordonnée la proportion du revenu total reçu par ces individus.

Sur le graphique, on indique toujours la diagonale. La courbe de Lorenz est égale à la diagonale si tous les individus ont le même revenu. Plus l'écart entre la courbe de Lorenz et la diagonale est important, plus les revenus sont distribués de manière inégalitaire.

Courbe de Lorenz



Indice de Gini

L'indice de Gini, noté G est égal à deux fois la surface comprise entre la courbe de Lorenz et la diagonale. Il est possible de montrer que :

$$G = \frac{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|}{2\bar{x}}.$$

En utilisant la statistique d'ordre $x_{(1)}, \ldots, x_{(i)}, \ldots, x_{(n)}$, l'indice de Gini peut également s'écrire

$$\boxed{G = \frac{1}{n-1}\left[\frac{2\sum_{i=1}^{n} i x_{(i)}}{n\bar{x}} - (n+1)\right]}$$

Indice de Gini

L’indice de Gini est compris entre 0 et 1. S’il est proche de 0, tous les revenus sont égaux. S’il est proche de 1, les revenus sont très inégaux.

Indice de Hoover

L'indice d'équirépartition de Hoover (ou *Robin Hood index*) est défini comme la proportion de revenus qu'il faudrait prendre aux individus gagnant plus que la moyenne et redistribuer aux individus gagnant moins que la moyenne pour que tout le monde ait le même revenu. Il est formellement définit par

$$H = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - \bar{x}|}{2\bar{x}}.$$

Indice de Hoover

Cet indice est également compris entre 0 et 1. Il vaut 0 si tous les individus ont le même revenu.

Cet indice est également lié à la courbe de Lorenz, car il est possible de montrer qu'il correspond à la plus grande distance verticale entre la courbe de Lorenz et la diagonale.

Quintile et Decile share ratio

On définit d'abord :

- S_{10} revenu moyen des individus ayant un revenu inférieur au premier décile $x_{1/10}$;
- S_{20} revenu moyen des individus ayant un revenu inférieur au premier quintile ou deuxième décile $x_{1/5}$;
- S_{80} revenu moyen des individus ayant un revenu supérieur au quatrième quintile ou huitième décile $x_{4/5}$;
- S_{90} revenu moyen des individus ayant un revenu supérieur au neuvième décile $x_{9/10}$.

Quintile et Decile share ratio

Le quintile share ratio est définit par

$$QSR = \frac{S_{80}}{S_{20}}.$$

Le decile share ratio est définit par

$$DSR = \frac{S_{90}}{S_{10}}.$$

Quintile et Decile share ratio

Ces quantités sont toujours plus grandes que 1 et augmentent avec l'inégalité.

Ces deux rapports sont facilement interprétables, par exemple si le QSR = 5, cela signifie que le revenu moyen de 20% des plus riches est 5 fois plus grand que le revenu moyen de 20% des plus pauvres.

Indice de pauvreté

Un indice simple de pauvreté consiste à calculer le pourcentage de la population gagnant moins que la moitié de la médiane.